

## UČNI NAČRT PREDMETA/COURSE SYLLABUS

<b>Predmet:</b>	Linearna algebra in vektorska analiza
<b>Course title:</b>	Linear algebra and vector analysis
<b>Članica nosilka/UL Member:</b>	UL FS

Študijski programi in stopnja	Študijska smer	Letnik	Semestri
Strojništvo - razvojno raziskovalni program, prva stopnja, univerzitetni	Ni členitve (študijski program)	1. letnik	2. semester

**Univerzitetna koda predmeta/University course code:** 0562743

**Koda učne enote na članici/UL Member course code:** 2006-U

Predavanja	Seminar	Vaje	Klinične vaje	Druge oblike študija	Samostojno delo	ECTS
60		45			70	7

**Nosilec predmeta/Lecturer:** Aljoša Peperko, Darja Rupnik Poklukar, Janez Žerovnik

**Vrsta predmeta/Course type:** Obvezni splošni predmet /Compulsory general course

**Jeziki/Languages:**

Predavanja/Lectures:	Slovenščina
Vaje/Tutorial:	Slovenščina

**Pogoji za vključitev v delo oz. za opravljanje študijskih obveznosti:**

**Prerequisites:**

Izpolnjevanje pogojev za vpis v Univerzitetni študijski program I. stopnje Strojništvo - Razvojno raziskovalni program.

Meeting the enrollment conditions for the Academic study programme of Mechanical Engineering - Research and Development program.

**Vsebina:**

**Content (Syllabus outline):**

<p>Linearna algebra:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Definicija vektorjev. <ul style="list-style-type: none"> <li>Koordinatni sistem v prostoru. Standardna ortonormirana baza. Osnovne operacije v koordinatnem in brezkoordinatnem zapisu. Definicija grupe na primeru vektorjev in seštevanja.</li> </ul> </li> <li>Skalarni, vektorski in mešani produkt. <ul style="list-style-type: none"> <li>Definicija in osnovne lastnosti produktov. Fizikalni pomen produktov in uporaba za računanje kotov, navorov, prostornin. Dvakratni vektorski produkt.</li> </ul> </li> <li>Enačbi ravnine in premice v prostoru.</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>algebra: <ol style="list-style-type: none"> <li>Definition of vectors. <ul style="list-style-type: none"> <li>Coordinate system in Euclidean space. Standard orthonormed basis. Basic operations in coordinate and noncoordinate form. Definition of a group based on the example of vectors and addition.</li> </ul> </li> <li>Scalar, vector and mixed product <ul style="list-style-type: none"> <li>Definition and basic properties of the products. Physical meaning of the products and applications for calculation of angles, torque, volumes. Double vector product.</li> </ul> </li> </ol> </li> </ol>
---	---

<ul style="list-style-type: none"> <li>• Uporaba teh enačb za računanje razdalj med geometrijskimi objekti (razdalja med točko in premico, med točko in ravnino, med dvema premicama) in za reševanje drugih geometrijskih nalog.</li> </ul> <p>4. Matrike in osnovne operacije.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Seštevanje matrik, množenje matrike s številom, množenje matrik. Determinante. Osnovne lastnosti determinante. Inverzne matrike. Karakterizacija obrnljivih matrik. Matrične enačbe.</li> </ul> <p>5. Sistemi linearnih enačb.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Zapis sistema enačb v obliki matrične enačbe. Gaussov postopek. Analiza rešljivosti sistema enačb. Računanje inverzne matrike. Cramerjevo izrek o rešitvah enolično rešljivega sistema linearnih enačb.</li> </ul> <p>6. Linearni (vektorski) prostori.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Definicija in primeri za motivacijo. Linearna neodvisnost. Baza in dimenzija linearnega prostora. Linearne preslikave (operatorji) in njihove lastnosti. Primeri linearnih in nelinearnih preslikav.</li> </ul> <p>7. Prehod med bazami.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Lastni vektorji in lastne vrednosti linearnih preslikav. Definicija in metoda za računanje lastnih vrednosti in lastnih vektorjev. Primeri linearnih preslikav: translacije, rotacije, odvod, integral.</li> </ul> <p>Vektorska analiza</p> <p>8. Integrali funkcij več spremenljivk.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Definicija. Fizikalni zgledi. Fubinijev izrek. Vpeljava novih koordinat. Polarne koordinate.</li> </ul> <p>9. Splošna formula za vpeljavo novih koordinat.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Jacobijeva matrika. Cilindrične koordinate. Sferične koordinate. Fizikalni zgledi. Krivulje. Ločni parameter.</li> </ul> <p>10. Ukrivljenost.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Torzija. Skalarna in vektorska polja. Divergenca. Rotor. Krivuljni integral skalarne polja.</li> </ul> <p>11. Krivuljni integral vektorskega polja.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Potencialna polja. Vrtinčna polja. Zgledi in fizikalni primeri. Ploskovni integral skalarne polja.</li> </ul> <p>12. Ploskovni integral vektorskega polja.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Gaussov izrek. Stokesov izrek. Greenova formula. Zgledi.</li> </ul> <p>Linearni sistemi diferencialnih enačb</p> <p>13. Linearni sistemi diferencialnih enačb kot modeli v inženirstvu.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Homogeni sistemi in nehomogeni sistemi. Opis splošne rešitve, prevedba posebnih sistemov na linearno diferencialno enačbo višjega reda.</li> </ul> <p>14. Metoda lastnih vrednosti in lastnih vektorjev za homogene sisteme 1.reda s konstantnimi koeficienti.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Partikularna rešitev za splošne linearne sisteme 1.reda. Prevedba linearne diferencialne enačbe n-tega reda na sistem n enačb 1.reda</li> </ul> <p>15. Realne in kompleksne potenčne vrste, lastnosti, konvergenčni radij.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Odvajanje in integriranje realnih potenčnih vrst.</li> </ul>	<p>3. Equations of planes and lines in the Euclidean space</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Applications of these equations for calculation of lengths between geometrical objects (length between a point and a line, between a point and a plane, between two lines) and for solving other geometric assignments.</li> </ul> <p>4. Matrices and basic operations</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Sumation of matrices, multiplication with a scalar, multiplication of matrices. Determinants. Basic properties of determinants. Invertible matrices. Characterization of invertible matrices. Matrix equations.</li> </ul> <p>5. Systems of linear equations.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- systems written in the form of a matrix equation. Gauss and Gauss Jordan algorithms. Analysis of solvability of linear systems. Cramer rule.</li> </ul> <p>6. Vector spaces</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Definition and examples for motivation. independence. Basis and dimension of a vector space. Linear mappings (operators) and their properties. Examples of linear and nonlinear mappings.</li> </ul> <p>7. Transition between basis'</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Eigenvectors and eigenvalues of linear maps. Definition and method for calculation of eigenvalues and eigenvectors. Examples of linear maps: translations, rotations, derivate, integral.</li> </ul> <p>Vector analysis</p> <p>8. Integrals of functions of several variables</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Definition. Physical meaning. Fubini theorem. Substitution (new coordinates). Polar coordinates.</li> </ul> <p>9. General formula for substitution.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Jacobi matrix. Cylindrical coordinates. Spherical coordinates. Examples from physics. Curves. Length curve parameter.</li> </ul> <p>10. Curvature.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Torsion. Scalar and vector fields. Divergence. Curl. Line integral of a scalar field.</li> </ul> <p>11. Line integral of a vector field.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Potential fields. Curl fields. Examples.</li> </ul> <p>12. Surface integral of a vector field</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Gauss theorem. Stokes theorem. Green formula. Examples.</li> </ul> <p>systems of differential equations</p> <p>13. systems of differential equations as models in engineering.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Homogeneous systems and nonhomogeneous systems. Descriptions of a general solution. Transformation of special systems to a linear equation of a higher order.</li> </ul> <p>14. Method of eigenvalues and eigenvectors for homogeneous systems of first order.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Particular solution of a general linear system of</li> </ul>
---	---

Metoda za reševanje linearne diferencialne enačbe z nekonstantnimi koeficienti s pomočjo potenčnih vrst (potenčna metoda).	<p>first order. Transformation of a linear differential equation of n-th order to a system of n equation of first order.</p> <p>15. Real and complex power series, properties, radius of convergence.</p> <p>- Differentiation and integration of real power series. Method of solution of a linear differential solution with nonconstant coefficients with power series (power method).</p>
--	---

#### Temeljna literatura in viri/Readings:

1. ŽEROVNIK, Janez. Matematika 2. Popravljen in dopolnjen izd. Ljubljana: Fakulteta za strojništvo, 2017.
2. NOVAK, Tina, PEPERKO, Aljoša, RUPNIK POKLUKAR, Darja, ZAKRAJŠEK, Helena. Matematika 2 : naloge in postopki reševanja. 1. popravljen izd. Ljubljana: Fakulteta za strojništvo, 2017.
3. ŽEROVNIK, Janez, BANIČ, Iztok, HRASTNIK LADINEK, Irena, ŠPACAPAN, Simon. Zbirka rešenih nalog iz tehniške matematike. 4. izd. Ljubljana: Fakulteta za strojništvo, 2011.
4. E. Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, Wiley, 9th Edition, 2006
5. MIZORI-OBLAK, Pavlina. Matematika za študente tehnike in naravoslovja : prvi del. Ponatis 6. izd. Ljubljana: Fakulteta za strojništvo, 2009.
6. MIZORI-OBLAK, Pavlina. Matematika za študente tehnike in naravoslovja. Del 2. izd. Ljubljana: Fakulteta za strojništvo, 1997.
7. MIZORI-OBLAK, Pavlina. Matematika : za študente tehnike in naravoslovja. Del 3. Ljubljana: Fakulteta za strojništvo, 1986.

#### Cilji in kompetence:

<p>Cilji:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Študenti spoznajo osnovno teoretično podlago iz področij linearne algebre, vektorske analize in sistemov linearnih diferencialnih enačb.</li> <li>2. Spoznajo teoretične osnove metod za reševanje in izpeljavo rešitev nekaterih fizikalnih in tehniških problemov</li> </ol> <p>Kompetence:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Sposobnost uporabe pridobljenih matematičnih znanj s področij linearne algebre, vektorske analize in sistemov linearnih diferencialnih enačb za modeliranje, reševanje in evalviranje strokovnih tehniških problemov v strojništvu (S1-RRP, S6-RRP, P4-RRP)</li> <li>2. Sposobnost samostojnega pridobivanja ustreznega matematičnega znanja za namen reševanja strokovnih inženirskih problemov (P5-RR5, S1-RRP, S2-RRP, S6-RRP, P4-RRP).</li> </ol>
---

#### Objectives and competences:

<p>Objectives:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Students learn theoretical basis of linear algebra, vector analysis and systems of linear differential equations.</li> <li>2. Students learn theoretical foundations of methods to solve some physical and engineering problems.</li> </ol> <p>Competences:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. The ability to apply the obtained mathematical knowledge of linear algebra, vector analysis, vector analysis and systems of linear differential equations for modelling, solving and analysis professional technical problems from mechanical engineering (S1-RRP, S6-RRP, P4-RRP)</li> <li>2. The ability to acquire new adequate mathematical knowledge for solving professional engineering problems (P5-RR5, S1-RRP, S2-RRP, S6-RRP, P4-RRP).</li> </ol>
---

#### Predvideni študijski rezultati:

<p>Znanja:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Obvladajo metode osnovne linearne algebre, osnovne vektorske analize in teorije sistemov</li> </ul>
---

#### Intended learning outcomes:

<p>Knowledge:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Mastering the methods of basic linear algebra, basic vector analysis and the theory of systems of linear</li> </ul>
--

<p>linearnih diferencialnih enačb s konstantnimi koeficienti (Z1).</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Razumejo matematične modele nekaterih fizikalnih in tehniških problemov (Z1).</li> </ul> <p>Spretnosti:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Spretnost samostojnega matematičnega eksaktnega modeliranja primerno zahtevnih strokovnih problemov (S1.2, S1.3, S1.4).</li> <li>Trdna analitična spretnost razmišljanja in analitično-sintetičnega reševanja eksaktnih problemov (S1.2, S1.3, S1.4).</li> </ul>	<p>differential equations with constant coefficients (Z1).</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Understanding mathematical models of some physical and technical problems (Z1).</li> </ul> <p>Skills:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>The skill of independent mathematical exact modelling of suitably demanding professional problems (S1.2, S1.3, S1.4).</li> <li>Solid analytic skill of thinking and analytic-synthetic solving of exact problems (S1.2, S1.3, S1.4).</li> </ul>
---	--

#### Metode poučevanja in učenja:

#### Learning and teaching methods:

<p>P1 Avditorna predavanja z reševanjem izbranih - za področje značilnih - teoretičnih in praktično uporabnih primerov.</p> <p>P2 Obravnava snovi po urejeni in vnaprej razloženi sistematiki.</p> <p>P3 Avditorne vaje, kjer se teoretično znanje s predavanj podkrepi z računskimi primeri.</p> <p>P12 Individualizirane domače naloge v spletni učilnici</p>	<p>P1 Auditorial lectures with solving selected field-specific theoretical and applied problems.</p> <p>P2 Presenting the content according to the explained system.</p> <p>P3 Auditorial exercises, in which theoretical content from the lectures is supplemented with practical examples.</p> <p>P12 Individualised homeworks in a web classroom.</p>
---	--

#### Načini ocenjevanja:

#### Delež/Weight

#### Assessment:

Pisni izpit.	50,00 %	Written exam.
Teoretični izpit.	50,00 %	Theoretical exam.

#### Reference nosilca/Lecturer's references:

##### Janez Žerovnik

- SHAO, Zehui, JIANG, Huiqin, WU, Pu, WANG, Shaohui, **ŽEROVNIK, Janez**, ZHANG, Xiaosong, LIU, Jia-Bao. On 2-rainbow domination of generalized Petersen graphs. *Discrete applied mathematics*. [Print ed.]. March. 2019, vol. 257, str. 370-384, ilustr. ISSN 0166-218X.]
- REPOLUSK, Polona, **ŽEROVNIK, Janez**. Formulas for various domination numbers of products of paths and cycles. *Ars combinatoria*. 2018, vol. 137, str. 177-20 ISSN 0381-7032.
- ZUPAN, Hugo, HERAKOVIČ, Niko, **ŽEROVNIK, Janez**, BERLEC, Tomaž. Layout optimization of a production cell. *International journal of simulation modelling*. Dec. 2017, vol. 16, nr. 4, str. 603-616, ilustr. ISSN 1726-4529.
- ŠPARL, Petra, WITKOWSKI, Rafał, **ŽEROVNIK, Janez**. Multicoloring of cannonball graphs. *Ars mathematica contemporanea*. [Tiskana izd.]. 2016, vol. 10, no. 1, str. 31-4 ISSN 1855-3966.]
- ERVEŠ, Rija, **ŽEROVNIK, Janez**. Improved upper bounds for vertex and edge fault diameters of Cartesian graph bundles. *Discrete applied mathematics*. [Print ed.]. 30 Jan. 2015, vol. 181, str. 90-97. ISSN 0166-218X.

##### Aljoša Peperko

- MÜLLER, Vladimir, **PEPERKO, Aljoša**. On the Bonsall cone spectral radius and the approximate point spectrum. *Discrete and continuous dynamical systems*, ISSN 1078-0947, Oct. 2017, vol. 37, nr. 10, str. 5337-5354
- MÜLLER, Vladimir, **PEPERKO, Aljoša**. Generalized spectral radius and its max algebra version. V: Special issue on 17th ILAS conference, Braunschweig 2011, 17th Conference of the International Linear Algebra Society, Braunschweig, Germany, August 2011, (Linear algebra and its applications, ISSN 0024-3795, Vol. 439, iss. 4).

Amsterdam [etc.]: Elsevier. 2013, str. 1006-1016.

3. ANDREIANOV, Boris, KRAMAR FIJAVŽ, Marjeta, **PEPERKO, Aljoša**, SIKOLYA, Eszter. Erratum to : semigroups of max-plus linear operators. Semigroup forum, ISSN 0037-1912, Apr. 2017, vol. 94, iss. 2, str. 477-479
4. **PEPERKO, Aljoša**, MÜLLER, Vladimir. On the spectrum and the spectral mapping theorem in max algebra. V: *Book of abstracts*, 7th Linear Algebra Workshop, Ljubljana, Slovenia, June 4 - 12, 2014 and 23rd International Workshop on Matrices and Statistics, Ljubljana, Slovenia, June 8 - 12, 2014 Ljubljana: Fakulteta za matematiko in fiziko: Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko: IJS. 2014, str. 35.  
<http://www.law05.si/law14/abstracts/Peperko.pdf>. [COBISS.SI-ID [17054553](#)]
5. NOVAK, Tina, **PEPERKO, Aljoša**, RUPNIK POKLUKAR, Darja, ZAKRAJŠEK, Helena. *Matematika 2 : naloge in postopki reševanja*. 1. popravljena izd. Ljubljana: Fakulteta za strojništvo, 2017. 171 str., ilustr. ISBN 978-961-6980-33-3. [COBISS.SI-ID [289166080](#)]

#### **Darja Rupnik Poklukar**

1. NOVAK, Tina, **RUPNIK POKLUKAR, Darja**, ŽEROVNIK, Janez. *The Hosoya polynomial of double weighted graphs*. Ars mathematica contemporanea. [Tiskana izd.]. 2018, vol. 15, no. 2, str. 441-466, ilustr. ISSN 1855-3966.  
<https://amc-journal.eu/index.php/amc/article/download/1297/1239>, DOI: [10.26493/1855-3974.1297.c7c](#). [COBISS.SI-ID [16257563](#)], [JCR, SNIP, WoS do 3. 12. 2019: št. citatov (TC): 1, čistih citatov (CI): 0]
2. **RUPNIK POKLUKAR, Darja**, ŽEROVNIK, Janez. *Reliability Hosoya-Wiener polynomial of double weighted trees*. Fundamenta informaticae. 2016, vol. 147, nr. 4, str. 447-456, ilustr. ISSN 0169-2968.  
<http://content.iospress.com/articles/fundamenta-informaticae/fi1416>, DOI: [10.3233/FI-2016-1416](#). [COBISS.SI-ID [15186971](#)], [JCR, SNIP, WoS do 3. 12. 2019: št. citatov (TC): 1, čistih citatov (CI): 0, Scopus do 29. 11. 2020: št. citatov (TC): 3, čistih citatov (CI): 1]
3. KRČMAR, Stjepan, **RUPNIK POKLUKAR, Darja**. *Comparison of the efficiency of three types of canopy traps on the collection of horse flies (diptera: tabanidae)*. Entomologia generalis. 2011, vol. 33, no. 1/2, str. 115-123. ISSN 0171-8177. [COBISS.SI-ID [12018203](#)], [JCR, SNIP, WoS do 21. 6. 2020: št. citatov (TC): 3, čistih citatov (CI): 3, Scopus do 24. 6. 2020: št. citatov (TC): 4, čistih citatov (CI): 4]
4. **PEPERKO, Aljoša**, PERMAN, Mihael, **RUPNIK POKLUKAR, Darja**. *Matematika 3 : naloge in postopki reševanja*. 2. dopolnjena izd. Ljubljana: Fakulteta za strojništvo, 2020. 210 str., ilustr. ISBN 978-961-6980-69-2. [COBISS.SI-ID [14594563](#)]
5. NOVAK, Tina, **PEPERKO, Aljoša**, **RUPNIK POKLUKAR, Darja**, ZAKRAJŠEK, Helena. *Tehniška matematika 2 : naloge in postopki reševanja*. 2. dopolnjena izd. Ljubljana: Fakulteta za strojništvo, 2019. 221 str., ilustr. ISBN 978-961-6980-56-2. [COBISS.SI-ID [298792960](#)]